Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

Izbirni predmeti na magistrskih programih Oddelka za matematiko FMF

Študijsko leto 2019/20

Ljubljana, 2019

Seznam temeljnih predmetov na magistrskem študiju

Naslednji predmeti so ključni v svojih skupinah in imajo zagotovljeno izvajanje vsaki dve leti.

Skupina	Temeljni predmeti
M1 (analiza in mehanika)	Kompleksna analiza Parcialne diferencialne enačbe Teorija mere Uvod v funkcionalno analizo
M2 (algebra in diskretna matematika)	Kombinatorika Komutativna algebra Nekomutativna algebra Teorija grafov
M3 (geometrija in topologija)	Algebraična topologija 1 Analiza na mnogoterostih
M4 (numerična matematika)	Numerična aproksimacija in interpolacija Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje
M5 (verjetnost, statistika, finančna matematika)	Finančna matematika 2 Statistika 2 Verjetnost 2
R1 (računalniška matematika)	Logika v računalništvu Matematika z računalnikom Računska geometrija Verjetnostne metode v računalništvu
O (ostalo)	Matematični modeli v biologiji Astronomija Moderna fizika

Seznam izbirnih predmetov v letu 2019/20

Skupina	Predmet	Izvajalec	Semester
M1	Kompleksna analiza Teorija mere Funkcionalna analiza Specialne funkcije ali Dinamični sistemi	Forstnerič Kandić Drnovšek Kostenko	zimski zimski poletni poletni
M2	Teorija grup in polgrup Kombinatorika Komutativna algebra Kardinalna aritmetika	Moravec Konvalinka Klep Simpson	zimski zimski poletni poletni
M3	Analiza na mnogoterostih Algebraična topologija 1 Algebraična topologija 2	Forstnerič Smrekar Strle	zimski zimski poletni
M4	Numerična aproksimacija in interpolacija Numerične metode za linearne sisteme upravljanja Numerično reševanje parcialnih dif. enačb	Knez Plestenjak Žagar	zimski poletni poletni
M5	Finančna matematika 2 Verjetnost 2 Bayesova statistika Časovne vrste Aktuarska matematika: neživljenska zavarovanja Numerične metode v finančni matematiki	Perman Bernik Smrekar Basrak Vidmar Zanette	zimski zimski zimski zimski poletni poletni
R1	Teorija programskih jezikov Verjetnostne metode v računalništvu* Kombinatorične metode in algoritmi* Logika v računalništvu* Matematika z računalnikom◇	Pretnar Cabello Egecioglu Simpson Pretnar	zimski zimski poletni poletni poletni
O	Podatkovno rudarjenje in strojno učenje† Moderna fizika Astronomija Delovna praksa	Todorovski Grozdanov Zwitter Konvalinka/Košir	poletni poletni oba oba

* Predmeti Izbrana poglavja iz računalniške matematike

◇ Predmet na študijskem programu Finančna matematika

† Predmet Izbrane teme iz analize podatkov na 1. stopnji (5 kreditnik točk)

Kompleksna analiza

Franc Forstnerič

Opis: S kompleksno analizo ste se prvič srečali pri predmetu Analiza 2B. V okviru tega predmeta bomo spoznali vrsto novih vsebin. Obravnavali bomo princip maksimuma za holomorfne funkcije in njegove posledice. Ogledali si bomo konvergenco v prostoru holomorfnih funkcij in Montelov izrek o normalnih družinah. Z njegovo pomočjo bomo nato dokazali enega od ključnih rezultatov teorije, to je Riemannov upodobitveni izrek. Študirali bomo injektivne holomorfne funkcije in dokazali izreke Koebeja, Landaua ter Picardov izrek, da je vsaka holomorfna funkcija na kompleksni ravnini, ki izpusti vsaj dve vrednosti, konstantna. Slednji je osnova za uvedbo pojma Kobayashijeve metrike in hiperboličnosti, ki povezuje kompleksno analizo z diferencialno geometrijo. Holomorfne funkcije bomo aproksimirali z racionalnimi funkcijami, v posebnih primerih s polinomi. Z uporabo vrst bomo rešili Mittag-Lefflerjev problem o obstoju meromorfne funkcije s predpisanimi glavnimi deli, z uporabo neskončnih produktov pa bomo konstruirali holomorfne funkcije z ničlami v dani diskretni množici. Spoznali bomo tudi osnove pojme kohomologije s koeficienti v snopu ter reševanje nehomogene Cauchy-Riemannove enačbe z uporabo Hörmanderjeve L^2-metode. V zaključnem delu bomo obravnavali harmonične in subharmonične funkcije na ravninskih domenah.

Vsebina predmeta omogoča nadaljnji študij vrste področij, kot so Riemannove ploskve, kompleksna analiza v več spremenljivkah, analitična in algebraična geometrija, naravno pa se navezuje tudi na teorijo eliptičnih parcialnih diferencialnih enačb.

Potrebno/pričakovano predznanje: Osnove analize v obsegu predmetov Analiza 1, Analiza 2A in Analiza 2B. Najpomembnejše potrebne rezultate iz predmeta Analiza 2B bomo uvodoma ponovili.

Izvedba 3/2. Predavanja in vaje. Pisni del izpita sestoji iz samostojnega reševanja domačih nalog, ki jih bodo študenti prejeli med semestrom, ter zaključnega pisnega izpita. Študent in predavatelj imata pravico zahtevati tudi ustni izpit za potrditev ali dvig ocene.

Teorija mere

Marko Kandić

Vsebina:

Verjetnostni račun je na začetku pretežno preučeval diskretne dogodke s kombinatoričnimi metodami. Leta 1933 je Kolmogorov postavil temelje modernejšega pristopa, ki slonijo na teoriji mere. Mera, kot pojem, je posplošitev pojmov dolžine, ploščine in volumna na poljubne množice.

Pri predmetu bomo najprej vpeljali osnovne pojme in nato konstruirali Lebesgueovo mero na realni osi, ki se na intervalih ujema z njihovo dolžino. Mera omogoča definicijo Lebesgueovega integrala funkcij na splošnih podmnožicah, ki niso nujno podmnožice v $\mathbb{R}^n$. Z Lebesgueovim integralom lahko integriramo nekatere razmeroma preproste funkcije, ki niso Riemannovo integrabilne. Tak primer je karakteristična funkcija racionalnih števil intervala $[0, 1]$. Sama definicija Lebesgueovega integrala je abstraktna, a se v primeru zvezne funkcije na intervalu $[a, b]$ Lebesgueov integral ujema z Riemannovim. Različice znanih izrekov iz Analize 1 in Analize 2a (zamenjava limite in integrala, integracija funkcijskih vrst, Fubinijev izrek) bomo dokazali v primeru Lebesgueovega integrala.

V nadaljevanju bomo vpeljali pojma realne in kompleksne mere. Dokazali bomo Lebesgue-Radon-Nikodýmov izrek ter Hahnov in Jordanov razcep realne mere. Srečali se bomo tudi s pojmom L^p-prostorov. Ti prostori predstavljajo nepogrešljiv vir Banachovih prostorov v funkcionalni analizi. Nato si bomo ogledali mere na lokalno kompaktnih prostorih. Pri tem bomo dokazali Rieszov izrek o reprezentaciji pozitivnih funkcionalov na $C_c(X)$. Za konec si bomo ogledali še odvajanja mer in funkcij.

Potrebno/pričakovano predznanje: Osnovni pojmi o množicah in razumevanje osnov analize iz prvega in drugega letnika.

Izvedba 3/2. Predavanja in vaje. Namesto kolokvijev ena domača naloga, ki se upošteva pri oceni. Končna ocena je kombinacija domače naloge, pisnega in teoretičnega izpita.

Funkcionalna analiza

Roman Drnovšek

Vsebina:

V prvem delu bomo obravnavali tri temeljne izreke teorije Banachovih prostorov: izrek o odprti preslikavi, izrek o zaprtem grafu in princip enakomerne omejenosti.

Hahn-Banachov izrek bo glavno orodje v drugem delu: separacija konveksnih množic, šibke topologije, Banach-Alaoglujev izrek, Krein-Milmanov izrek o ekstremnih točkah.

V tretjem delu bomo obravnavali osnove teorije Banachovih algeber: spekter elementa, Rieszov funkcijski račun, Gelfandova transformacija.

Zadnji del bo posvečen teoriji C*-algeber: ideali in kvocienti, komutativne C*-algebre, funkcijski račun v C*-algebrah, Gelfand-Naimark-Segalova konstrukcija.

Potrebno/pričakovano predznanje:

Osnove linearne algebre, matematične analize in topologije.

Izvedba 3/2. Predavanja in vaje. Namesto kolokvijev dve domači nalogi, ki se upoštevata pri oceni. Pisni izpit.

Special Functions (Specialne funkcije)

Aleksey Kostenko

Vsebina:
The concept of "special function" is one that has no precise definition. From a practical point of view, a special function is a function of one variable that is not one of the "elementary functions" (algebraic, trigonometric functions, the exponential, the logarithm, and functions constructed algebraically from these functions), and is a function about which one can find information in many of the books about special functions.

The aim is to cover (actually, we would only be able to touch) the following topics during this course:

- The classical orthogonal polynomials (Chebyshev, Gegenbauer, Hermite, Jacobi, Laguerre, Legendre).
- Hypergeometric functions.
- Bessel functions.
- Elliptic functions.

Most of all these special functions have appeared in XVIII–XIX centuries in solutions to differential equations arising in important problems of mathematical physics. Among numerous applications of special functions, we plan to focus on representations of compact Lie groups and their applications to quantum mechanics and also on applications to nonlinear completely integrable wave equations (e.g., KdV and Toda).

Potrebno/pričakovano predznanje: Familiarity with power series, integrals, and convergence; basic knowledge of linear algebra; some familiarity with operator theory in Hilbert spaces is desirable.

Izvedba 2/1/2. Lectures and exercises. Planned examination regulations: written and oral exam. Homework is taken into account in the assessment of the written part of the exam.

Dynamical Systems (Dinamični sistemi)

Aleksey Kostenko

Content:
1. *Qualitative analysis of systems of nonlinear differential equations.* Basic existence and uniquenes theorems for systems (repetition and completion).
2. *Phase portraits of autonomous systems.* Classification of critical points, Hartman–Grobman linearization theorem, stability theory, Lyapunov method.
3. *Periodic motions and cycles in the real plane.* Poincaré–Bendixson theory (topological background, proof and examples), Kolmogorov theorem, Hopf bifurcation and emerging of cycles, introduction to chaotic motion.
4. *Basic discrete dynamics.* Difference equations. The logistic equation. Classification of fixed points. Period doubling and chaos. Heteroclinic orbits ans Smale horseshoe. Polynomial iteration in the complex plane. Julia, Fatou and Mandelbrot sets.

Necessary/Expected Knowledge. Linear algebra; differential equations; topology in euclidean spaces.

Izvedba 3/2: Predavanja in vaje.

Teorija grup in polgrup

Primož Moravec

Vsebina:
Grupe in polgrupe so osrednji pojem abstraktne algebre, njihova struktura je vkodirarna v drugih algebraičnih strukturah, kot so kolobarji, obsegi in vektorski prostori. Po drugi strani grupe in polgrupe igrajo pomembno vlogo tudi v drugih vejah matematike, kot so analiza, topologija, kompleksna analiza, teorija števil, finančna matematika in teoretično računalništvo. Teorija grup nas uči prepoznavati simetrije v naravi, zato so grupe svoje mesto našle v fiziki, kemiji, medicini in celo v glasbeni teoriji.

Pri predmetu študent najprej spozna osnove teorije grup, dekompozicijske vrste grup, predstavitev grup z generatorji in relacijami, rešljive grupe, nilpotentne grupe in osnove teorije razširitev. V sklopu, ki obsega teorijo polgrup, so naslednja poglavja: osnovni pojmi teorije polgrup, Greenove relacije in regularne polgrupe.

Naučili se bomo uporabe programskega orodja `GAP` pri konstrukciji primerov grup in polgrup ter študiju njihovih lastnosti.

Potrebno/pričakovano predznanje: Algebra 2 in Algebra 3 prve stopnje študija matematike.

Izvedba 3/2. Predavanja in vaje. Domača naloga se upošteva pri oceni pisnega dela izpita. Po opravljenem pisnem izpitu je potrebno opraviti še ustni del izpita.

Kombinatorika

Matjaž Konvalinka

Vsebina:
Preštevalna kombinatorika je področje diskretne matematike, ki se ukvarja s preštevanjem matematičnih objektov z določenimi lastnostmi. Problemi segajo od zelo lahkih (npr. število permutacij množice z n elementi je $n!$) do (verjetno) nerešljivih (npr. poiskati število neizomorfnih grafov na n točkah). Pri predmetu bomo nadgradili znanje o osnovnih problemih preštevanja (izbori, razčlenitve in razdelitve, dvanajstera pot), q-analogih, Pólyevi teoriji, delno urejenih množicah in Möbiusovi inverziji. Poudarek bo na rodovnih funkcijah in formalnih potenčnih vrstih (algebra formalnih potenčnih vrst, računanje z rodovnimi funkcijami, eksponentna formula, Lagrangeeva inverzija) ter na njihovi uporabi (reševanje rekurzivnih enačb, iskanje povprečij in standardnih deviacij, aproksimacija členov zaporedja).
Pri predmetu bomo predelali veliko večino vsebin, zahtevanih na kombinatoričnem delu magistrskega izpita iz diskretne matematike.

Potrebno/pričakovano predznanje: Poznavanje osnovnih principov preštevanja (pridobljenega npr. pri predmetu Diskretna matematika 1 na prvostopenjskem študiju Matematike ali Finančne matematike ali pri predmetu Kombinatorika na prvostopenjskem študiju IŠRM).

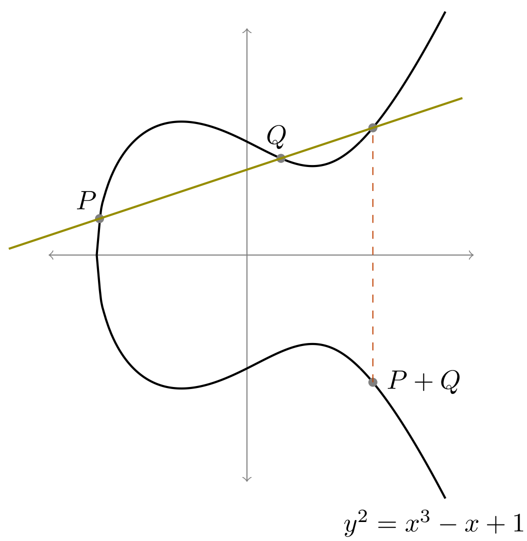
Izvedba 3/2. Izpit iz vaj in izpit iz teorije.

Komutativna algebra

Igor Klep

Vsebina:
Komutativna algebra preučuje komutativne kolobarje, njihove ideale in module. Algebraična geometrija in moderna teorija števil sta zasnovani na komutativni algebri. Osnovni primeri komutativnih kolobarjev so polinomski kolobarji, kolobarji algebraičnih celih števil (npr. $\mathbb{Z}$) in p-adična cela števila. Pri predmetu bomo ob poudarku na geometriji nadgradili osnovno znanje teorije kolobarjev z naslednjimi temami:

- Komutativni kolobarji, ideali, moduli. Noetherski kolobarji in Hilbertov izrek o bazi.
- Groebnerjeve baze, osnove računanja z ideali.
- Spekter kolobarja in radikali. Lokalizacija in napolnitev.
- Afine raznoterosti in topologija Zariskega. Hilbertov Nullstellensatz.
- Morfizmi, polinomske in racionalne preslikave.
- Projektivne raznoterosti.
- Dimenzija in gladkost raznoterosti.
- Sheme.



Literatura:

- D. Eisenbud. Commutative Algebra. With a View toward Algebraic Geometry, Springer, New York, 1995.
- D. Cox, J. Little, D. O'Shea: Ideals, Varieties and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra, 2nd edition, Springer, New York, 2005.
- A. Gathmann: Algebraic Geometry, zapiski, 2002. `https://www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/class/alggeom-2002/alggeom-2002.pdf`

Potrebno/pričakovano predznanje: Znanje iz predmeta Algebra 2 je potrebno, zaželjeno pa je tudi znanje Algebre 3.

Izvedba 3/2. Domače naloge, izpit.

Cardinal Arithmetic (Kardinalna aritmetika)

Alex Simpson

Vsebina:
The course studies notions of infinity in mathematics, from the viewpoint of set theory. On the one hand, this leads to powerful infinitary methods of proof, such as transfinite induction. On the other, one is naturally led to mathematical questions that apparently have no clear answer. The most famous of these is Cantor's *Continuum Hypothesis*, which is a statement about the arithmetic of cardinal numbers. This statement turns out to be *undecidable* in the sense that it can be consistently assumed to be true, and also consistently assumed to be false.

The principal course topics are:

- The axioms of Zermelo Fraenkel set theory.
- Set theory as a foundation of mathematics.
- The Axiom of Choice: equivalent statements, and consequences.
- Transfinite induction and the notion of ordinal.
- The notion of cardinal, and the Schröder-Bernstein Theorem.
- Cardinal arithmetic and the Continuum Hypothesis.
- Large cardinals.
- Peculiar set-theoretic universes.

The course will be given in English.

Potrebno/pričakovano predznanje: Splošna matematična izobraza s 1. stopnje študija matematike. Predmet je izrazito matematične narave, zato mora imeti študent veselje do abstraktnega razmišljanja in dokazovanja izrekov.

Izvedba 3/2. Obveznosti študenta: pisni izpit.

Analiza na mnogoterostih

Franc Forstnerič

Opis predmeta: Gladka mnogoterost dimenzije n je Hausdorffov topološki prostor, ki je lokalno v okolici vsake točke videti kot n-dimenzionalni evklidski prostor, ti evklidski kosi pa so zlepljeni skupaj z gladkimi difeomorfizmi. Pojem mnogoterosti se je razvil iz del slavnih matematikov in fizikov, kot so bili Gauss, Riemann, Klein, Poincaré, Einstein, Weyl, Cartan, Chern in mnogi drugi. Teorija mnogoterosti je osnova za vrsto področij sodobne matematike, kot so diferencialna, analitična in algebraična geometrija, diferencialna topologija, Liejeve grupe, dinamika, teorija foliacij itd. Mnogoterosti so nepogrešljivo orodje v fiziki, mehaniki, astronomiji in drugih področjih naravoslovja in tehnike.

Pričeli bomo s primeri in konstrukcijami mnogoterosti ter gladkih preslikav med njimi. Nato bomo analitične pojme in sredstva, kot so odvajanje, integriranje, diferencialne enačbe, vektorska polja itd., posplošili z evklidskih prostorov na mnogoterosti. Spoznali bomo vrsto novih pojmov, metod in rezultatov: tangentni in kotangentni sveženj mnogoterosti, tok vektorskega polja, komutator, Frobeniusov izrek o integrabilnosti distribucij, Liejeve grupe, Sardov izrek, osnove Morsejeve teorije, pojem transverzalnosti, diferencialne forme in njihova integracija, Stokesov izrek.

Predmet je dobra priprava na vrsto drugih predmetov iz analize in geometrije na 2. in 3. stopnji študija matematike.

Potrebno/pričakovano predznanje: Poznavanje osnov matematične analize in topologije v obsegu predmetov na prvi stopnji programa Matematika na FMF UL.

Izvedba 3/2. Predavanja in vaje. Pisni del izpita sestoji iz samostojnega reševanja domačih nalog, ki jih bodo študenti prejeli med semestrom, ter zaključnega pisnega izpita. Študent in predavatelj imata pravico zahtevati tudi ustni izpit za potrditev ali dvig ocene.

Algebraična topologija 1

Jaka Smrekar

Vsebina:

Topologija šteje homeomorfne prostore za ekvivalentne in eden od temeljnih problemov je razvoj metod, s katerimi lahko razlikujemo med nehomeomorfnimi prostori. Algebraična topologija prireja topološkim prostorom algebraične objekte (različna števila kot na primer Eulerjeva karakteristika, grupe kot na primer fundamentalna grupa, zaporedja grup) na kanoničen (funktorialen) način. Če dvema prostoroma (na isti način) priredimo različna algebraična objekta, nista homeomorfna.

Teme:

- Homotopija in homotopska ekvivalenca. Homotopska kategorija.
- Fundamentalna grupa.
- Krovni prostori. Klasifikacija krovnih prostorov.
- Simplicialni kompleksi in CW kompleksi.
- Homologija.

Potrebno/pričakovano predznanje:

Potrebno je poznavanje snovi predmetov Splošna topologija in Algebra 2. Pričakovano je poznavanje nekaterih tem Uvoda v geometrijsko topologijo, ki jih je sicer mogoče predelati sproti.

Izvedba 2/1/2. Predavanja in vaje, ocena na podlagi pisnega in ustnega izpita.

Algebraična topologija 2
Sašo Strle

Vsebina:
Algebraična topologija 2 je predmet, ki z Algebraično topologijo 1 tvori vsebinsko celoto. Oba predmeta sta ponujena v dveh zaporednih semestrih istega leta, zato se bomo lahko izognili ponavljanju začetnega dela snovi. Formalno pa snov Algebraične topologije 1 ni predpogoj za opravljanje Algebraične topologije 2.

V algebraični topologiji geometrijske objekte (ploskve, telesa, višje razsežne mnogoterosti, vozle, prostore rešitev diferencialnih enačb pa tudi zapletene vzorce, digitalizirane posnetke in podobno) študiramo s pomočjo algebraičnih struktur, predvsem številskih karakteristik (stopnja, ovojno število, Eulerjeva karakteristika) ter grup (homotopskih in (ko)homoloških). Tradicionalno je algebraična topologija sinteza in vrhunec dodiplomskega študija ter pomemben predpogoj za nadaljevanje študija na tretji stopnji in za raziskovalno delo. Nekateri deli pa so tudi močno povezani z uporabo: na primer simplicialni kompleksi so standardno orodje za digitaliziranje slik in za numerično modeliranje, homološke in kohomološke grupe pa se rutinsko uporabljajo za samodejno računalniško analizo zapletenih množic podatkov, kot so satelitske slike, posnetki, dobljeni z magnetno resonanco, in podobno.

Potrebno/pričakovano predznanje:
Pričakovano predznanje obsega predmete Splošna topologija, Uvod v geometrijsko topologijo, Algebra 2 in delno Algebra 3. Predmet se navezuje na vse predmete, ki imajo močno geometrijsko komponento (npr. Algebraična topologija 1, Algebraične krivulje, Algebraična geometrija, Diferencialna geometrija, Analiza na mnogoterostih, Riemannove ploskve, Liejeve grupe) in je poznavanje kateregakoli od teh zelo dobrodošlo s stališča motivacije, ni pa predpopogoj za poslušanje predmeta. V kolikor bodo vsi poslušalci poznali vsebine iz Algebraične topologije 1, bomo to upoštevali pri izbiri snovi.

Izvedba 2/1/2. Predmet se bo izvajal s predavanji ter s kombinacijo seminarjev in vaj. Ocena bo oblikovana na podlagi sprotnih domačih nalog in ustnega izpita.

Numerična aproksimacija in interpolacija

Marjeta Knez

Vsebina:
Predmet obravnava matematična orodja, ki so nepogrešljiva pri aproksimativnem reševanju praktičnih problemov. Spoznamo razrede funkcij, ki so primerni za iskanje aproksimacij, kot so polinomi, odsekoma polinomske funkcije oziroma zlepki, trigonometrični polinomi ipd. Seznanimo se tudi s kriteriji, ki aproksimativne funkcije določajo. Tu izbiramo med optimalnimi shemami, kot so enakomerna aproksimacija ali aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov, in preprostejšimi linearnimi pristopi, kot je interpolacija. Spoznamo različne algoritme ter postopke za konstrukcijo aproksimantov ter merila za določanje njihove kvalitete. Predmet je osnova vsem drugim predmetom s področja numerične analize.

Potrebno/pričakovano predznanje: Ustrezno znanje iz analize ter poznavanje osnov numerične matematike.

Izvedba 3/2. Predavanja in vaje. Načrtovan izpitni režim: pisni in ustni izpit ter dve domači nalogi, ki se upoštevata pri oceni pisnega dela izpita.

Numerične metode za linearne sisteme upravljanja

Bor Plestenjak

Vsebina: Obravnavali bomo linearne sisteme upravljanja oz. kontrolne sisteme oblike

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t),\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

za $t \geq t_0$ z začetnim stanjem $x(t_0) = x_0$. Pri tem je A matrika stanja, B je vhodna, C izhodna in D prehodna matrika, $x(t)$ je vektor stanj, $u(t)$ vhodni in $y(t)$ izhodni signal.

Tako lahko npr. opišemo delovanje klimatske naprave, avtopilota v letalu in drugih sistemov, ki se prilagajajo zunanjim podatkom tako, da se izhodni signal čim bolj ujema z željenim (npr., z nastavljeno temperaturo prostora). Da je to sploh možno, morajo imeti vse lastne vrednosti matrike A negativen realni del.

Poudarek bo na učinkovitih algoritmih za matrične probleme, ki nastopajo na tem področju, a se sicer pojavljajo tudi drugje. Med drugim se bomo ukvarjali z naslednjimi problemi:

- računanje eksponentne funkcije matrike $M(t) = e^{At}$ (in drugih funkcij matrik),
- reševanje Ljapunove matrične enačbe $XA + A^T X = C$,
- reševanje Sylvestrove matrične enačbe $XA + BX = C$,
- reševanje Riccatijeve matrične enačbe $XA + A^T X + XBR^{-1}B^T X + Q = 0$.

Ključne besede: Linearni sistem upravljanja, matrika stanja, stabilnost, vodljivost, spoznavnost, odprtozančni in zaprtozančni sistemi, Ljapunova enačba, Sylvestrova enačba, Riccatijeva enačba, stabilizacija sistema.

Potrebno/pričakovano predznanje: obvezni numerični predmeti 1. stopnje.

Izvedba (3/2): 2 domači nalogi se upoštevata pri oceni pisnega dela izpita, po opravljenem pisnem delu izpita je potrebno opraviti še ustni izpit.

Ostalo: Predmet je namenjen vsem, ki jih zanima praktično reševanje matematičnih problemov in delo z računalnikom. Tudi bolj teoretično usmerjeni matematiki boste prišli na svoj račun, saj bomo linearno algebro nadgradili s številnimi teoretičnimi rezultati.

Več informacij o predmetu, vključno s skripto, lahko najdete na spletni strani

`http://www-lp.fmf.uni-lj.si/plestenjak/vaje/NMLSU/nmlsu.htm`

ali preko elektronske pošte, seveda pa se lahko tudi osebno oglasite pri predavatelju.

Numerično reševanje parcialnih diferencialnih enačb

Emil Žagar

Vsebina:

Predmet obravnava snov, ki v uporabno smer nadgrajuje poznavanje matematike na področju reševanja parcialnih diferencialnih enačb. Slušatelje vpelje v numerične metode, njihovo analizo in implementacijo ter spozna s praktičnimi problemi, kjer se posamezni pristopi posebej odlikujejo.

Obravnavane bodo naslednje teme: Parcialne diferencialne enačbe. Modelni problemi drugega reda. Enačbe eliptičnega tipa. Poissonova enačba. Diferenčna metoda. Diskretni maksimalni princip in ocena globalne napake. Iterativno reševanje diskretiziranih enačb. Jacobijeva, Gauss-Seidelova in SOR metoda. ADI metoda. Metode podprostorov Krilova. Večmrežne metode. Variacijske metode. Različni tipi metod končnih elementov. Enačbe paraboličnega tipa. Prevajanje toplote. Eksplicitne in implicitne numerične sheme. Crank-Nicolsonova metoda. Konsistenca, stabilnost in konvergenca. Enačbe hiperboličnega tipa. Valovna enačba. Karakteristike, karakteristične spremenljivke. Diferenčna metoda. Courantov pogoj. Konvergenca diferenčnih aproksimacij za modelni primer. Metoda karakteristik.

Potrebno/pričakovano predznanje: Priporočljiv je predhodno opravljen izbirni predmet *Numerična aproksimacija in interpolacija*. Predavatelj bo za tiste, ki tega predmeta niso poslušali, v predavanja vključil kratko premostitev.

Izvedba 2/1/2. Načrtovan izpitni režim: domači nalogi, pisni in ustni izpit. Domači nalogi se upoštevata pri oceni pisnega dela izpita. Po opravljenem pisnem izpitu je potrebno opraviti še ustni del izpita.

Finančna matematika 2

Mihael Perman

Vsebina:

1. Sredstva iz analize in verjetnosti.
1.1 Funkcije z omejeno totalno variacijo.
1.2 Lebesgue-Stiltjesov integral.
1.3 Konvergenca v L^2 prostorih.
1.1 Maksimalne neenakosti za diskretne martingale.
2. Brownovo gibanje.
2.1 Motivacija in definicija.
2.2 Markovska in krepka markovska lastnost, princip zrcaljenja.
2.2 Brownovi martingali.
2.3 Martingali v zveznem času, kvadratična variacija.
2.4 Izrek o opcijskem ustavljanju v zveznem času.
3. Itôv integral.
3.1 Konstrukcija, Itôva izometrija, osnovne lastnosti.
3.2 Itôva lema in uporabe.
3.2 Lokalizacija in lokalni martingali.
3.2 Integral glede na lokalni martingal
3.2 Splošna Itôva formula.
4. Vrednotenje izvedenih vrednostnih papirjev.
4.1 Black-Sholesov model.
4.2 Varovanje v zveznem času.
4.3 Zamenjava mere, izrek Girsanova.
4.4 Izrek o martingalski reprezentaciji.
4.5 Eksplicitni primeri vrednotenja opcij.

Potrebno/pričakovano predznanje: Analiza 2: parcialno odvajanje, integracija funkcij več spremenljivk in integrali s parametrom. Verjetnost: neodvisnost, pričakovana vrednost, osnovne porazdelitve, pogojne porazdelitve in pogojna pričakovana vrednost, diskretni martingali. Teorija mere: abstraktni integral, izreka o monotoni in dominirani konvergenci, Fubinijev izrek, Radon-Nikodýmov izrek, L^p prostori. Finančna matematika 1: modeli gibanja cen, definicija izvedenih vrednostnih papirjev, princip ene cene, ekvivalentne mere in kompletnost modelov.

Izvedba (3/2): Predmet ima običajno strukturo izvajanja s predavanji in vajami. Študenti morajo opraviti pisni izpit, ki ima utež 60% v celotni oceni. Drugi del obveznosti z utežjo 40% je seminarska naloga. Ustni izpit je po želji, če kdo želi popraviti oceno.

Verjetnost 2

Janez Bernik

Vsebina:

Markovske verige v diskretnem času. Povezava s teorijo grafov in linearno algebro. Osnovna struktura verig. Časi prvih prehodov in vrnitev. Povrnljiva in minljiva stanja. Časi ustavljanja ter enostavna in krepka markovska lastnost. Ergodično obnašanje verige. Limitni izreki. Posebnosti v primeru končnega števila stanj.

Markovske verige v zveznem času: čisti skočni procesi brez eksplozije. Zvezna markovska lastnost. Naprejšnje in nazajšnje enačbe Kolmogorova v integralski in diferencialni obliki in njihove rešitve. Diferencialne enačbe in generator polgrupe. Konstrukcija: stabilnost in neeksplozivnost.

Uporaba markovskih verig: čakalni sistemi (rojstno smrtni čakalni sistem, čakalni sistem M/M/1, osnovni pojmi teorije strežnih sistemov, nekateri pomembni primeri čakalnih sistemov). Metoda Monte Carlo markovskih verig (Bayesova statistika in Monte Carlo simulacije, algoritma Gibbsov vzorčevalnik in Metropolis-Hastings, konvergenca algoritmov.

Potrebno/pričakovano predznanje: Opravljeni izpiti iz verjetnosti in statistike na 1. stopnji.

Izvedba 3/2: Ocena je določena na osnovi pisnega izpita.

Časovne vrste (Time series)

Bojan Basrak

Predavanja bodo v angleščini.

Vsebina:
Introduction: Examples of time series. Trend and seasonality. Autocorrelation function. Multivariate normal distribution. Strong and week stationarity. Hilbert spaces and prediction. Introduction to R.
Stationary sequences: Linear processes. ARMA models. Causality and invertibility of ARMA processes. Infinite order MA processes. Partial autocorrelation function. Estimation of autocorrelation function and other parameters. Forecasting stationary time series. Modeling and forecasting for ARMA processes. Asymptotic behavior of the sample mean and the autocorrelation function. Parameter estimation for ARMA processes.
Spectral analysis: Spectral density. Spectral density of ARMA processes. Herglotz theorem. Periodogram.
Nonlinear and nonstationary time series models: ARCH and GARCH models. Moments and stationary distrbutiopn of GARCH process. Exponential GARCH. ARIMA models.
Statistics for stationary process: Asymptotic results for stationary time series. Estimating trend and seasonality. Nonparametric methods.

Potrebno/pričakovano predznanje: Verjetnost 1 in/ali Verjetnost in Statistika

Izvedba 2/1/2. Domače naloge, pisni izpit, seminarska naloga in zagovor.

Bayesova statistika

Jaka Smrekar

Vsebina:
Velik del statistike v praksi predstavlja ocenjevanje parametrov na podlagi slučajnega vzorca spremenljivk, katerih porazdelitve so povezane z ocenjevanimi parametri. Bayesova statistika omogoča, da v ocenjevanje vključimo predhodno 'mnenje' o vrednostih teh parametrov (na primer na podlagi sorodnih vzorcev podatkov iz preteklosti). Tudi v 'frekventističnih' problemih, ko predhodnih informacij o vrednostih naših parametrov nimamo ali pa jih ne želimo vključiti, se moramo pri ocenjevanju pogosto opreti na metode Bayesove statistike. Tipično je Bayesovo ocenjevanje računsko intenzivno in z vedno večjo zmogljivostjo računalnikov narašča tudi uporabnost Bayesove statistike.

Podrobno bomo obravnavali naslednje teme:

- Bayesovi modeli z enim in več parametri.
- Hierarhični modeli.
- Konjugirane apriorne porazdelitve.
- Algoritmi za aproksimacijo aposteriorne porazdelitve.
- Regresijska analiza.

Pričakovano predznanje: Osnove verjetnostnega računa, diskretne in zvezne slučajne spremenljivke in vektorji, večrazsežna normalna porazdelitev in iz nje izvedene porazdelitve.

Izvedba 2/1/2. Ocena na podlagi pisnega izpita ter domače naloge z ustnim zagovorom.

Aktuarska matematika: neživljenjska zavarovanja

Matija Vidmar (v sodelovanju z Janezom Komeljem)

Vsebina:

(1) Modeli za procese štetja zavarovalniških zahtevkov: Poissonov proces, prenovitveni procesi in mešani Poissonovi procesi.
(2) Celotni škodni zahtevek: pričakovana vrednost in varianca, asimptotično vedenje v prenovitvenem modelu, principi določanja premije, lastnosti premijskega funkcionala in monotonost glede na stohastično urejenost. Porazdelitve škodnih zahtevkov: lahek in težek rep. Mešane porazdelitve. Aproksimacija porazdelitve skupne škode. Pozavarovanje.
(3) Teorija zavarovalniškega tveganja: mere tveganja, proces tveganja, verjetnost propada in pogoj čistega dobička, ocene verjetnosti propada.
(4) Zavarovalniške rezervacije in kapitalske zahteve.
(5) Teorija kredibilnosti.

Potrebno/pričakovano predznanje: Opravljeni izpiti iz verjetnosti in statistike na 1. stopnji.

Izvedba 2/1/2. Pisni izpit. Sodelovanje s strani gostov iz prakse (domače naloge).

Numerične metode v finančni matematiki (Numerical Methods in Financial Mathematics)

Antonino Zanette,
University of Udine, Italy and INRIA MathRisk project, Paris, France

Vsebina/Contents:
Algorithms for option pricing in discrete models. Monte Carlo Methods for European options. Simulation methods of classical law. Inverse transform method. Computation of expectation. Variance reduction techniques. Tree methods for European and American options. Convergence orders of binomial methods. Estimating sensitivities. Numerical algorithms for portfolio insurance. Tree methods and Monte Carlo methods for Exotic options (barrier options, asian options, lookback options, rainbow options). American Monte Carlo methods. Finite difference methods for the Black-Scholes PDE equation.

Potrebno/pričakovano predznanje/Prerequisites: It will be expected that the students are familiar with foundations of financial mathematics and numerical mathematics. It is required that they followed the course Financial Mathematics 2 (Finančna matematika 2) in the first semester or in the past.

Izvedba/Hours. 2/1/2 The course will be held in the Spring Semester of 2020 and given in a few two-day stays (3 hours of lectures per day). Others hours will be devoted to follow-up of the project development and oral discussion.

The final examination will be composed of three parts :
- a written examination,
- an oral discussion of the topics of the course,
- a presentation of a numerical project assigned by the teacher.

Bibliography: Notes, books and papers suggested by the teacher.
Additional material:
- J. Hull. Options, Futures, and Other Derivatives. Prentice Hall, 2011.
- N. H. Bingham, R. Kiesel. Risk-Neutral Valuation: Pricing and Hedging of Financial Derivatives. Springer Finance, 2004.
- P. Glasserman. Monte Carlo Methods in Financial Engineering. Springer, 2003.

Teorija programskih jezikov

Matija Pretnar

Vsebina:
Pri predmetu bomo spoznali temeljna načela, ki vodijo razvoj modernih programskih jezikov. Na primerih znanih konstruktov (pogojni stavki, funkcije, zanke, ...) bomo pogledali, kako matematično formaliziramo programski jezik, ter s pomočjo dokazovalnikov (npr. Coq ali Agda) pokazali njegove lastnosti.

(1) Osnove funkcijskega programiranja.
(2) Uporaba dokazovalnikov.
(3) Konkretna in abstraktna sintaksa.
(4) Operacijska semantika.
(5) Sistemi tipov.
(6) Parametrični polimorfizem in samodejna izpeljava tipov.
(7) Denotacijska semantika.
(8) Računski učinki.

Literatura:

- B. Pierce. Types and Programming Languages. Cambridge University Press, 2002.
- B. Pierce et al. Software Foundations. https://softwarefoundations.cis.upenn.edu/
- P. Wadler, W. Kokke. Programming Language Foundations in Agda. https://plfa.github.io/

Potrebno/pričakovano predznanje:
- Osnovno znanje programiranja

Izvedba 3/2. Obveznosti študenta: domače naloge in pisni izpit.

Verjetnostne metode v računalništvu

Sergio Cabello

Vsebina:
Pri tem predmetu bomo spoznali uporabo verjetnosti za algoritmične in sorodne probleme. Videli bomo osnovne naključnostne algoritme in matematično bomo analizirali njihove lastnosti. Poudarek bo na pričakovani časovni zahtevnosti in verjetnosti napake algoritmov.

Podrobno bomo obravnavali naslednje teme:

- Quicksort in minimalni prerez.
- Razredi problemov in vrste naključnostnih algoritmov.
- Uporaba polinomov.
- Černove ocene (*Chernoff bounds*).
- Naključnostni prirastni algoritmi in povratna analiza.
- Linearno programiranje v nižjih dimenzijah.
- Markovske verige.
- Približno štetje.
- Zgoščevalne funkcije (*hash functions*).
- Tok podatkov.

Potrebno/pričakovano predznanje: Znanje o osnovnih algoritmih. Uporabili bomo diskretno verjetnost. En del predmeta je povezan s predmetom Računska geometrija, vendar se ga lahko razume neodvisno iz tega predmeta.

Izvedba 3/2. Izpit iz vaj in izpit iz teorije. Ob soglasju študentov bodo predavanja v angleškem jeziku.

Izbrana poglavja iz računalniške matematike: kombinatorične metode in algoritmi

Topics in mathematical foundations of computer science: Combinatorial Methods and Algorithms

Omer Egecioglu
Department of Computer Science, University of California, Santa Barbara

Course Description:
Sometimes techniques already available in one branch of science wait to be rediscovered in some disguise in another. This is particularly true for mathematics and computer science. This course covers a number of topics in discrete mathematical methods and combinatorics with applications to the solution of problems in computer science.

After covering basic introductory material and techniques in a few lectures, we will cover selected topics in

- formal languages in combinatorics,
- encoding and enumeration methods, bijections,
- lattice paths, generating functions and q-analogues,
- Chu-Vandermonde summation formula,
- integer partitions, Ferrers' diagrams,
- graph coloring and chromatic polynomials
- families and characterization of trees,
- planar trees and combinatorial Lagrange inversion,
- permutation statistics and Eulerian polynomials,
- exponential structures,
- partially ordered sets and Möbius inversion,
- elements of number theory with applications to computer science.

Course structure: 3 hours of lectures and 2 hours of exercise classes.
There will be homework assignments and a final exam.

References:
Omer Egecioglu, Combinatorial Foundations of Computer Science
Alan Tucker, Applied Combinatorics, (6th edition), Wiley, 2012
J. H. van Lint and R. M. Wilson, A Course in Combinatorics, Cambridge University Press, 1992.
Richard Stanley, Enumerative Combinatorics, Vol I. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series, 1986.

Logika v računalništvu

Alex Simpson

Vsebina:
From the construction of low-level integrated-circuit architecture, to the verification of high-level program and system behaviour, applications of logic pervade computer science. This course will explore some of the variety of different logics used in computer science, looking at applications, the technology underpinning such applications, and the mathematical theory behind them.

The main topics of study will be:

(1) Propositional logic and satisfiablility. SAT-solvers.
(2) Predicate logic. Its use as a modelling language. Bounded model checking.
(3) Temporal logic. System modelling. Model checking using Büchi automata.
(4) Hoare logic for program verification. Cook's relative completeness theorem.

The course will be given in English.

Literature:

- M. Huth and M. Ryan. Logic in Computer Science: Modelling and Reasoning about Systems. Cambridge University Press. Second edition, 2004.
- K. Baier and J.-P. Katoen. Principles of Model Checking. MIT Press, 2008.

Potrebno/pričakovano predznanje:

- Osnovno znanje programiranja

Izvedba 3/2. Obveznosti študenta: pisni izpit.

Matematika z računalnikom
Matija Pretnar

Vsebina:
Spoznali bomo računalniška orodja, ki jih uporabljajo matematiki pri svojem delu: dokazovalni pomočniki, sistemi za simbolno računanje, orodja za analizo velikih omrežij, za risanje grafov, za delo z grupami, za računanje topoloških invariant ipd. Predmet je torej odlična osnova za vse, ki bodo v 21. stoletju reševali teoretične ali praktične matematične probleme.

Predmet bo potekal projektno. Študenti bodo izdelali vsak svoj projekt, ki bo izbran v skladu z njihovimi interesi. Poudarek bo na praktični uporabi obstoječih orodij, zato bodo študenti praviloma reševali konkretne matematične probleme z obstoječimi računalniškimi orodji. Kdor pa bo tako želel, bo lahko v sklopu svojega projekta tudi implementiral kak algoritem za matematično računanje.

Potrebno/pričakovano predznanje: Razen splošnega matematičnega znanja s prve stopnje študija matematike, ni zahtevano posebno predznanje.

Izvedba(3/2): Študent opravi predmet z izdelavo in kratko predstavitvijo svojega projekta.

Izbrane teme iz analize podatkov

Ljupčo Todorovski

Vsebina in cilji predmeta:
Predmet obravnava napredno analizo podatkov s posebnim poudarkom na napovednem modeliranju, t.j., gradnji napovednih modelov iz podatkov. Spoznali bomo algoritme podatkovnega rudarjenja in strojnega učenja za napovedno modeliranje. Cilj predmeta je študentom posredovati znanje in veščine uporabe omenjenih algoritmov pri reševanju praktičnih problemov podatkovne analize. Zato bo poudarek na razumevanju prednosti in slabosti algoritmov za napovedno modeliranje, a osnova bo razumevanje teoretičnega in matematično-računalniškega ozadja njihovega delovanja. Vaje bodo namenjene praktični analizi izbranih podatkovnih množic z algoritmi podatkovnega rudarjenja in strojnega učenja implementiranimi v programskem okolju R. Bolj specifično, predmet obravnava naslednje vsebine

(1) Splošni postopki gradnje napovednih modelov: priprava podatkov, vrednotenje napovedne napaka in izbira modela, problem pretiranega prileganja (*overfitting*), prekletstvo večdimenzionalnosti, dekompozicija napovedne napake in vpliv na izbiro modela;
(2) Metode strojnega učenja za napovedno modeliranje: linearna in logistična regresija, metoda najbližjih sosedov, odločitvena drevesa, nevronske mreže, metoda podpornih vektorjev in jedra ter ansambli napovednih modelov;
(3) Nenadzorovano učenje in odkrivanje vzorcev: razvrščanje v skupine (*clustering*), iskanje pogostih množic postav in povezovalnih pravil;
(4) Izbira in sestavljanje spremenljivk za napovedno modeliranje: obravnava različnih tipov podatkov (besedila in slike), vstavitve (*embeddings*) in avtokodirniki, metode za izbiro in sestavljanje spremenljivk;
(5) Reševanje praktičnih problemov podatkovne analize in napovednega modeliranja.

Povezanost z drugimi predmeti:
Potrebo je osnovno poznavanje programiranja (npr. predmet *Uvod v programiranje*), verjetnosti in statistike, predvsem osnovnih preizkusov statistične značilnosti (npr. predmeta *Statistika* in *Verjetnosti račun*) ter programskega okolja za statistiko R.

Izpitni režim:
Sprotne domače naloge analize enostavnih podatkovnih množic (20% ocene), projekt oddan po koncu semestra, ki zajema reševanje podatkovnega izziva, t.j., analize realne podatkovne množice (50% ocene), ustni izpit po uspešno izdelanem projektu (30% ocene).

Literatura (izbrana poglavja iz):

(1) James G, Witten D, Hastie T, Tibshirani R (2013) *An introduction to statistical learning: with applications in R*. New York: Springer.
(2) Hastie T, Tibshirani R, Friedman J (2009) *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction*. Second Edition. New York: Springer.
(3) Flach P (2012) *Machine learning: the art and science of algorithms that make sense of data*. Cambridge: Cambridge University Press.
(4) Kuhn M, Johnson K (2013) *Applied predictive modeling*. New York: Springer.

Moderna fizika

Grozdanov

Vsebina:

Elektromagnetno polje:

- Električna in magnetna polja;
- Integralska in diferencialna oblika Maxwellovih enačb;
- Elektromagnetno valovanje;

Posebna teorija relativnosti:

- Transformacija prostor-časa
- Transformacije električnega in magnetnega polja, Maxwellove enačbe v kovariantni obliki

Kvantna fizika:

- Valovne lastnosti delcev;
- Schroedingerjeva enačba in probabilistična interpretacija;
- Postulati kvantne fizike, Heisenbergove relacije;
- Harmonični oscilator;
- Vodikov atom;
- Standardni model osnovnih delcev: leptoni in kvarki, osnove umeritvenih teorij elektromagnetne, šibke in močne interakcije.
- Modeli vesolja

Potrebno/pričakovano predznanje: Od študentov pričakujemo predznanje fizike v obsegu ustreznega predmeta na 1. stopnji študija matematike.

Izvedba 3/2. Predmet obsega predavanja (3 ure tedensko) in računske vaje (2 uri tedensko). Pri računskih vajah obdelamo izbrane primere, ki ponazorijo snov s predavanj. Snov, obdelana na računskih vajah, je predmet pisnega izpita; tega lahko opravimo sproti v obliki dveh kolokvijev. Po opravljenem pisnem izpitu je potrebno opraviti še ustni del izpita.

Astronomija

Tomaž Zwitter

Vsebina:
Zgodovinski uvod: astronomska odkritja, ki so spremenila svet, osnovne meritve.
Osnove orientacije po nebu: koordinatni sistemi, kvantitativne posledice rotacije in revolucije, loma, precesije, lastnega gibanja, aberacije svetlobe in paralakse.
Sodobni astronomski teleskopi: odboj in lom, osnovni parametri teleskopa, geometrijske, uklonske in atmosferske omejitve, nastanek in lastnosti slike.
Astronomski instrumenti: osnovne lastnosti digitalnih detektorjev, osnove fotometričnih in spektroskopskih opazovanj.
Sonce kot tipična zvezda: masa Zemlje in Sonca, njuna povprečna gostota, izsev, efektivna temperatura, površinski težnostni in rotacijski pospešek.
Struktura Soncu podobnih zvezd: hidrostatično ravnovesje, dinamični čas, središčni tlak in temperatura, utemeljitev privzetka idealnega plina, politropni model, virialni teorem, termični čas, prozornost snovi, ocena proste poti fotonov, sevalni in konvekcijski prenos energije.
Starost zvezd: primer Zemlje in Sonca, jedrske reakcije, njihova stabilnost in nuklearni čas, odvisnost izseva od mase za Soncu podobne zvezde.
Razvoj zvezd: nastanek in Jeansova masa, faza orjakinj, končne faze razvoja, odvisnost razvoja od mase.
Opazovanje razvoja: Hertzsprung-Russellov diagram, zvezdne kopice, merjenje razdalj, spektri kemijskih elementov v zvezdnih atmosferah v odvisnosti od temperature, kemične sestave, radialne hitrosti in težnostnega pospeška, prekrivalne spektroskopske dvojne zvezde, opazovanje končnih stopenj razvoja zvezd.
Medzvezdni prostor: absorpcija v plinu in prahu, vrste meglic, opazljive lastnosti.

Potrebno/pričakovano predznanje: Vpis v letnik.

Izvedba 4/2. Predavanja, vaje in praktična domača naloga, izvedena na Astronomsko geofizikalnem observatoriju. Domača naloga se upošteva pri oceni pisnega dela izpita. Po opravljenem pisnem izpitu je potrebno opraviti še ustni del izpita.